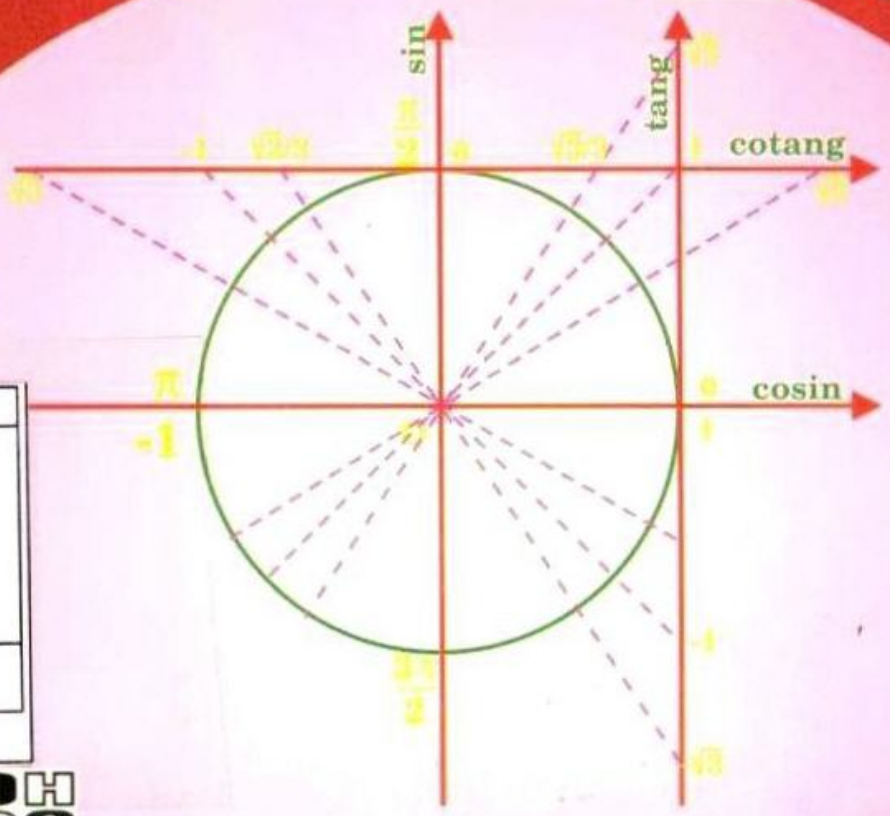
LÊ BÍCH NGỌC *(chủ biên)*
LÊ HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

Lượng giác 11

(Dùng cho học sinh ban A và luyện thi đại học)



ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ BÍCH NGỌC *(Chủ biên)*
LÊ HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
LƯỢNG GIÁC 11

(Dùng cho học sinh ban A và luyện thi đại học)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

HỌC VÀ ÔN TẬP
TOÁN

do nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Thạc sĩ Toán học – Kĩ sư Tin học Lê Hồng Đức biên soạn.

Bộ sách gồm 8 cuốn:

Cuốn 1 : Học và ôn tập Toán - Hình học 10
Cuốn 2 : Học và ôn tập Toán - Đại số 10
Cuốn 3 : Học và ôn tập Toán - Lượng giác 11
Cuốn 4 : Học và ôn tập Toán - Hình học 11
Cuốn 5 : Học và ôn tập Toán - Đại số và Giải tích 11
Cuốn 6 : Học và ôn tập Toán - Hình học 12
Cuốn 7 : Học và ôn tập Toán - Giải tích 12
Cuốn 8 : Học và ôn tập Toán - Đại số tổ hợp 12

Mục tiêu của bộ sách này là cung cấp cho các thầy, cô giáo một bộ bài giảng chuyên sâu có chất lượng và cho các em học sinh trung học phổ thông yêu thích môn Toán một bộ sách học tập bổ ích.

Bộ sách được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp đặc biệt để giải Toán.

Bộ sách này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các thầy, cô giáo đến các em học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán tốt nghiệp PTTH hoặc vào các trường đại học.

Cuốn

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
LƯỢNG GIÁC 11

do Lê Bích Ngọc chủ biên được chia thành 2 chương:

Chương I: Hàm số lượng giác
Chương II: Phương trình và hệ phương trình lượng giác

bao gồm 8 chủ đề, miêu tả chi tiết phương pháp giải cho 42 dạng toán cơ bản và nâng cao của lượng giác 11.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Nhóm Cự Môn

Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội

Hà Nội, ngày 2 tháng 9 năm 2005
NHÓMCỰMÔN

CHƯƠNG I
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

CHỦ ĐỀ 1
GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

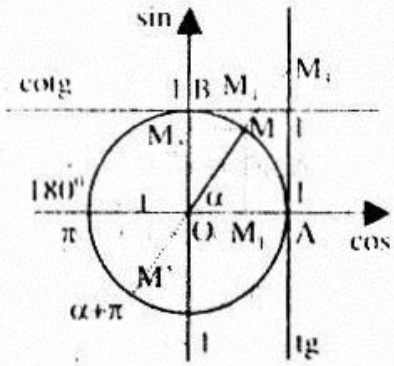
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. SỬ DỤNG ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC

Đường tròn lượng giác là đường tròn định hướng có bán kính bằng 1, trên đó có điểm A gọi là điểm gốc.

- Trục hoành tương ứng với trục giá trị của cosin.
- Trục tung tương ứng với trục giá trị của sin.
- Đường thẳng đi qua điểm A(1, 0) và vuông góc với trục cos tương ứng với trục giá trị của tang.
- Đường thẳng đi qua điểm B(0, 1) và vuông góc với trục sin tương ứng với trục giá trị của cotang.

Để biểu diễn giá trị các hàm số lượng giác của góc α trên đường tròn lượng giác ta thực hiện theo các bước:



Bước 1: Xuất phát từ điểm đầu A(1, 0) ta xác định vị trí của điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $\overset{\frown}{AM} = \alpha$.

Bước 2: Xác định:

- Gọi M_1 là hình chiếu vuông góc của M lên trục cos, ta được $\overline{OM_1} = \cos\alpha$.
- Gọi M_2 là hình chiếu vuông góc của M lên trục sin, ta được $\overline{OM_2} = \sin\alpha$.
- Gọi M_3 là giao điểm của tia OM với trục tg, ta được $AM_3 = tg\alpha$.
- Gọi M_4 là giao điểm của tia OM với trục cotg, ta được $\overline{BM_4} = cotg\alpha$.

Chú ý: Từ cách biểu diễn như vậy chúng ta nhận thấy:

1. Các góc lượng giác $\alpha + 2k\pi$, $k \in Z$ cùng xác định một điểm M trên đường tròn lượng giác, do đó:

(i). $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$.

(ii). $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi)$.

(iii). $tg\alpha = tg(\alpha + 2k\pi)$.

(iv). $cotg\alpha = cotg(\alpha + 2k\pi)$.

2. Nếu gọi M' là điểm đối xứng với M qua O, ta thấy ngay tia OM cắt các trục tg và cotg vẫn tại M_3 và M_4, do đó các công thức (iii) và (iv) được mở rộng hơn thành:

(i). $tg\alpha = tg(\alpha + k\pi)$.

(ii). $cotg\alpha = cotg(\alpha + k\pi)$.

2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG ĐẶC BIỆT

Độ đo / Hàm	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$cotg\alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\parallel$

3. DẤU CỦA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Ta có các kết quả sau:

Độ đo / Hàm số lượng giác	$0 < \alpha < 90^0$	$90^0 < \alpha < 180^0$
$\cos\alpha$	+	−
$\sin\alpha$	+	+
$tg\alpha$	+	−
$cotg\alpha$	+	−

4. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

a. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b. $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

c. $cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

d. $tg\alpha.cotg\alpha = 1$

e. $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha$

f. $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + cotg^2\alpha$

5. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG ĐỐI NHAU

a. $\sin(-x) = -\sin x$

b. $\cos(-x) = \cos x$

c. $tg(-x) = -tgx$

d. $cotg(-x) = -cotgx$

6. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG BÙ NHAU

a. $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$

b. $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$

c. $tg(180^0 - \alpha) = -tg\alpha$

d. $cotg(180^0 - \alpha) = -cotg\alpha$

7. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG PHỤ NHAU

a. $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$

b. $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$

c. $tg(90^0 - \alpha) = cotg\alpha$

d. $cotg(90^0 - \alpha) = tg\alpha$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tính giá trị của biểu thức lượng giác chứa các cung đặc biệt.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng:

1. Các hệ quả trong bảng giá trị lượng giác của các cung đặc biệt.
2. Các tính chất sau với $k \in \mathbb{Z}$

   (i). $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$.

   (ii). $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi)$.

   (iii). $tg\alpha = tg(\alpha + k\pi)$.

   (iv). $cotg\alpha = cotg(\alpha + k\pi)$.

Ví dụ 1: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = tg45^0.\cos390^0.cotg(-150^0).$$

Giải

Ta có:

$$A = tg45^0.\cos(30^0 + 360^0).cotg(30^0 - 180^0) = tg45^0.\cos30^0.cotg30^0$$

$$= 1.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3}{2}.$$

Chú ý: Dạng toán trên được mở rộng tự nhiên cho trường hợp các biểu thức có chứa tham số.

Ví dụ 2: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = 3a.\cos360^0 + b.\sin(-270^0) + a.\cos180^0.$$

Giải

Ta có:

$$A = 3a.\cos(0^0 + 360^0) + b.\sin(90^0 - 360^0) + a.\cos180^0$$

$$= 3a.\cos0^0 + b.\sin90^0 + a.\cos180^0 = 3a + b \quad a = 2a + b.$$

Ví dụ 3: Tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \frac{8a^3\cos^3 60^0 + b^3 \cot g^3 45^0 + (12ab.\sin 0^0)^2}{(25a.\cos 90^0)^3 + 2a.\sin 30^0 + 2b.\cos^2 45^0}.$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{8a^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + b^3.(1)^3 + (12ab.0)^2}{(25a.0)^3 + 2a.\frac{1}{2} + 2b.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2.$$

Chú ý: Từ kết quả tính toán trên ta thấy ngay rằng yêu cầu của bài toán còn có thể được phát biểu dưới dạng "*Chứng minh rằng với mọi a, b khác không thỏa mãn $a \neq -b$ ta luôn có $A \geq 0$*".

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = 8 - \cos^2 30^0 + 2\sin^2 45^0 - \sqrt{3}\,tg^3 60^0$.

b. $B = (a^2 + 1).\sin 0^0 + b.\cos 90^0 + c.\cos 180^0$.

Bài tập 2: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = 4\sin^4 135^0 + \sqrt{3}\cos^3 150^0 - 3\cot g^2 120^0$.

b. $B = 4\cos^4 135^0 - 8\sin^3 150^0 - 3(tg^2 120^0 - tg^4 135^0)$.

Bài tập 3: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \dfrac{a^2.\sin 180^0 - b^3\sqrt{2}.\sin 135^0 - 2ab^2.\cos 150^0}{a.\cot g150^0 - b.\cos 0^0 + 2atg60^0}$.

b. $B = \dfrac{a^2\sin 90^0 - b^2\cos 0^0}{a.\cot g45^0 + b.\cos 180^0 - 2a.\cot g90^0}$.

Bài toán 2: Dấu của biểu thức lượng giác .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xác định điểm ngọn của góc thuộc cung phần tư nào trên đường tròn đơn vị, từ đó sử dụng các hệ quả trong bảng dấu của các giá trị lượng giác.

Ví dụ 1: Xác định dấu của các biểu thức:

$$A = \sin 225^0.tg130^0.\cot g(\quad 175^0).$$

Giải

Ta có:

$180^0 < 225^0 < 270^0 \Rightarrow \sin 225^0 < 0.$

$390^0 = 30^0 + 360^0 \Rightarrow tg390^0 > 0.$

$175^0 = 5^0 \quad 180^0 \Rightarrow \cot g(\quad 175^0) > 0.$

Từ đó suy ra $A > 0$.

Chú ý: Nếu biểu thức còn phụ thuộc thêm tham số góc α thoả mãn điều kiện K, chúng ta cần thực hiện phép biểu diễn các góc trong biểu thức.

Ví dụ 2: Cho $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Xác định dấu của các biểu thức:

a. $A = \cos(\alpha \quad \dfrac{\pi}{4})$.

b. $B = \sin 2\alpha.tg(2\alpha \quad \dfrac{\pi}{2})$.

Giải

a. Từ giả thiết:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \alpha \quad \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow A = \cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) > 0.$$

b. Từ giả thiết ta được:

$0 < 2\alpha < \pi \Rightarrow \sin 2\alpha > 0$.

$$-\frac{\pi}{2} < 2\alpha - \frac{\pi}{2} < \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < 2\alpha - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} tg(2\alpha - \frac{\pi}{2}) \geq 0 \text{ nếu } 0 \leq 2\alpha - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \\ tg(2\alpha - \frac{\pi}{2}) < 0 \text{ nếu } -\frac{\pi}{2} < 2\alpha - \frac{\pi}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg(2\alpha - \frac{\pi}{2}) \geq 0 \text{ nếu } \frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \\ tg(2\alpha - \frac{\pi}{2}) < 0 \text{ nếu } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Từ đó ta được:

$$\begin{cases} A \geq 0 \text{ nếu } \frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \\ A < 0 \text{ nếu } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xác định dấu của các biểu thức:

a. $A = \cos 195^0.tg269^0.cotg(-98^0)$.

b. $B = \sin(-1441^0).\cos 1080^0.tg908^0.cotg(-1972^0)$.

Bài tập 2: Cho $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$. Xác định dấu của các biểu thức:

a. $A = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}).\cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$.

b. $B = tg2\alpha.\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$.

Bài tập 3: Cho $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{6}$. Xác định dấu của biểu thức:

$$A = \frac{\cos 2\alpha.\sin(2\alpha + \frac{\pi}{2})}{tg(\alpha + \frac{\pi}{3})}.$$

Bài tập 4: Cho ΔABC, xác định dấu của các biểu thức:

a. $S_1 = \sin A + \sin B + \sin C$.

b. $S_2 = \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$.

Bài tập 5: Cho ΔABC, xác định dấu của các biểu thức:

$$S = tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}.$$

Bài tập 6: Tìm $k \in \mathbf{Z}$, sao cho

a. $\sin(\frac{\pi}{4} + k\pi) > 0$.

b. $\cos(\frac{\pi}{3} - k\pi) < 0$.

Bài toán 3: Rút gọn biểu thức lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các hằng đẳng thức lượng giác.

Cần lưu ý rằng việc rút gọn biểu thức trong nhiều trường hợp là công việc cần thiết nhất trước khi thực hiện việc tính giá trị của biểu thức.

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.\left[1-\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}\right].$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.\left[1-\frac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}\right] = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.\left[1-\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right]$$

$$= \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = 2tg\alpha.$$

Chú ý: Thông qua ví dụ trên ta có tổng kết ban đầu: nếu bài toán trên được phát biểu dưới dạng:

" Cho $tg\alpha = m$, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.\left[1-\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}\right]."$$

Khi đó với các em học sinh chưa có kinh nghiệm sẽ thực hiện bài toán theo các bước:

Bước 1: Tính giá trị của các hàm số lượng giác có trong biểu thức là $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

Bước 2: Thay $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ vào biểu thức của A.

Cách giải này đương nhiên không sai những sẽ rất phức tạp nếu giá trị của $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ là các biểu thức vô tỉ hoặc giá trị của $tg\alpha$ phải biện luận theo tham số. Như vậy cách giải tốt nhất là thực hiện theo các bước:

Bước 1: Rút gọn biểu thức – thực hiện như trong ví dụ.

Bước 2: Suy ra $A = 2m$.

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức:

$$A = 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha). \quad (1)$$

Giải

Ta có:

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3$$
$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha.(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$
$$= 1 - 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha. \quad (2)$$

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha)^2 + (\cos^2\alpha)^2 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$
$$= 1 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$A = 2(1 - 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha) - 3(1 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha) = -1.$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức:

$$A = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép bình phương, ta có:

$$A^2 = \left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)^2$$

$$= \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} + 2\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$$

$$= \frac{(1-\sin\alpha)^2 + (1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha} + 2 = \frac{2+2\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} + 2 = \frac{4}{\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow A = \sqrt{\frac{4}{\cos^2\alpha}} = \frac{2}{|\cos\alpha|}.$$

Cách 2: Thực hiện phép biến đổi:

$$A = \sqrt{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}} + \sqrt{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \left|\frac{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}}\right| + \left|\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}}\right|$$

$$= \frac{(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2})^2 + (\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})^2}{\left|\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{2}{|\cos\alpha|}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Rút gọn biểu thức:

a. $A = \dfrac{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha.tg^2\alpha}{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha.cotg^2\alpha}$.

b. $B = (1 + cotg\alpha + \dfrac{1}{\sin\alpha})(1 + cotg\alpha - \dfrac{1}{\sin\alpha})$.